

Is Mathematics Discovered or Invented?

[MUSIC PLAYING]

MARCELO GLEISER: We start by examining the nature of mathematics. The essence of our question is this, is mathematics imprinted somehow in the universe as some kind of secret code of nature? Or is it something that we invent with our minds, a mere tool that we use to describe the world that we see and measure? If we go back to the beginning of our course to Ancient Greece and Plato, we remember his allegory of the cave, where the slaves can only look forward to the cave wall and they believed that whatever was projected on that wall was reality. Plato used this analogy to show that our senses can deceive us, that if you really want to probe the nature of truth, you cannot trust your senses, you cannot trust what you see or hear.

Plato argued that to truly understand the nature of reality you must go into your mind, to thought. For example, he would say that the only real circle is the idea of the circle that lives in your head. If I asked you to draw a circle, that representation of the idea of the circle on paper would never be as perfect as the idea itself. So Plato thought that to truly get a grip on reality we should pursue mathematical truth as our guide. To Plato the job of the philosopher was to uncover the truth, to seek the mathematical connections that reveal the essence of reality.

After Plato, the notion that nature is mathematical and that we can understand it through mathematics became a fundamental part of the scientific process. Plato's initial question, whether mathematics is imprinted in reality or whether it is a fabrication of the human mind, remains as important today as it was 2,500 years ago. Many pure mathematicians believe that mathematics is the only absolute truth that exists and that the pursuit of mathematical equations and proving theorems is a way of connecting with the deepest essence of reality. Others, including other mathematicians, are not so sure. They claim that even though there are mathematical statements which are true, like $2 + 2 = 4$, mathematics is really dependent on human intelligence.

The linguist George Lakoff from the University of California Berkeley would say that mathematics is embodied in the human brain, that it really is dependent on how our brain evolved from our primate ancestors to Homo sapiens. There are different points of view about this, but one thing is certain, that without mathematics we couldn't describe reality scientifically. Mathematics may or may not be the language of nature, but it is certainly the language we use to describe nature.

On the other hand, it is also true that some mathematical concepts don't seem to fit in the real world, living more in the world of ideas. For example, the concept of infinity. We can understand what infinity means. All we need to do is start counting 1, 2, 3, 4, et cetera, and we know that will never end. We know that the set of integer numbers is an infinite set. We also know that even if you just look at the numbers between 1 and 2, 1.1, 1.2, 1.3, and the numbers in between those, you will find infinity even there, in the real numbers.

Amazingly, this is an even bigger infinity than counting the integer numbers, infinities within the infinite. We can contemplate the idea of infinity mathematically, and we can construct concepts that use this notion, but can infinity exist in nature? Well, if it can, we'll never know. Why not?

Well, let's take the universe for example. If the universe is infinitely big spreading out in space endlessly, we can never make measurements that can confirm this. All we can say is that the measurements indicate that the universe is infinite in space, but we cannot be sure. Why not? Well, our measurements can never be so precise as to determine that space is infinite.

The same with time, we could say that universe is infinitely old, but we could never be sure of that, because we couldn't have an experiment running for all time to confirm that. And so even if we can play with the idea of infinity in physics, that we do it all the time, we can never be sure that it is realized in nature. Mathematics is powerful, because it is an abstraction. It pulls things out of reality and transforms them into perfect spheres, cones, triangles, squares, and then, creates relations between these objects. There is no question that those relations can help us understand physical reality, but they are not physical reality. They are a representation of physical reality.

So it's kind of mind boggling that mathematics, if invented by us, can be so useful in describing so many natural phenomena. This is the origin of the question, is mathematics invented or is it discovered? Is it a creation of our minds or is it out there in the universe waiting to be discovered by us?

[MUSIC PLAYING]

A matemática é descoberta ou inventada?

MARCELO GLEISER: Começamos examinando a natureza da matemática. A essência da nossa pergunta é esta: a matemática está impressa de alguma forma no universo como algum tipo de código secreto da natureza? Ou é algo que inventamos com nossas mentes, uma mera ferramenta que usamos para descrever o mundo que vemos e medimos? Se voltarmos ao início do nosso curso para a Grécia Antiga e Platão, lembramos da sua alegoria da caverna, onde os escravos só podiam olhar para a frente para a parede da caverna e acreditavam que tudo o que era projetado na parede era realidade. Platão usou essa analogia para mostrar que os nossos sentidos podem nos enganar, que se você realmente quer examinar a natureza da verdade, não pode confiar nos seus sentidos, não pode confiar no que vê ou ouve.

Platão argumentou que para realmente entender a natureza da realidade você deve entrar em sua mente, no pensamento. Por exemplo, ele diria que o único círculo real é a ideia do círculo que vive na sua cabeça. Se eu te pedisse para você desenhar um círculo, essa representação da ideia do círculo no papel nunca seria tão perfeita quanto a própria ideia. Então, Platão pensou que, para realmente entendermos a realidade, devemos buscar a verdade matemática como nosso guia. Para Platão, o trabalho do filósofo era descobrir a verdade, buscar as conexões matemáticas que revelam a essência da realidade.

Depois de Platão, a ideia de que a natureza é matemática e que podemos compreendê-la através da matemática tornou-se uma parte fundamental do processo científico. A pergunta inicial de Platão, se a matemática está impressa na realidade ou se é uma fabricação da mente humana,

continua tão importante hoje quanto há 2.500 anos. Muitos matemáticos puros acreditam que a matemática é a única verdade absoluta que existe e que a busca de equações matemáticas e a prova de teoremas é uma maneira de se conectar com a essência mais profunda da realidade. Outros, incluindo outros matemáticos, não têm tanta certeza. Eles afirmam que, embora existam declarações matemáticas que são verdadeiras, como $2 + 2 = 4$, a matemática é muito dependente da inteligência humana.

O linguista George Lakoff, da Universidade da Califórnia em Berkeley, diria que a matemática é incorporada no cérebro humano, que ela realmente é dependente de como nosso cérebro evoluiu dos nossos ancestrais primatas para o *Homo sapiens*. Existem pontos de vista diferentes sobre isso, mas uma coisa é certa, que sem a matemática não poderíamos descrever a realidade cientificamente. A matemática pode ou não ser a linguagem da natureza, mas certamente é a linguagem que usamos para descrever a natureza.

Por outro lado, também é verdade que alguns conceitos matemáticos não parecem se encaixar no mundo real, vivendo mais no mundo das ideias. Por exemplo, o conceito de infinito. Podemos entender o que significa o infinito. Tudo o que precisamos fazer é começar a contar 1, 2, 3, 4, etc, e sabemos que nunca vai acabar. Sabemos que o conjunto de números inteiros é um conjunto infinito. Sabemos também que mesmo se você olhar apenas para os números entre 1 e 2, 1.1, 1.2, 1.3, e os números entre esses, você encontrará o infinito até mesmo lá, nos números reais.

Incrivelmente, este é um infinito ainda maior do que contar os números inteiros, infinitos dentro do infinito. Podemos contemplar a ideia do infinito matematicamente, e podemos construir conceitos que usam essa ideia, mas o infinito pode existir na natureza? Bem, se puder, nunca saberemos. Por que não? Bem, vamos pegar o universo, por exemplo. Se o universo é infinitamente grande se espalhando no espaço infinitamente, nunca poderemos fazer medições que possam confirmar isso. Tudo o que podemos dizer é que as medições indicam que o universo é infinito no espaço, mas não podemos ter certeza. Por que não? Bem, nossas medições podem nunca ser tão precisas para determinar que o espaço é infinito.

A mesma coisa com o tempo, poderíamos dizer que o universo é infinitamente velho, mas nunca poderíamos ter certeza disso, porque não poderíamos ter uma experiência em andamento por todos os tempos para confirmar isso. E, assim, mesmo que possamos jogar com a ideia do infinito na física, o que fazemos o tempo todo, nunca podemos ter certeza de que ele é realizado na natureza. A matemática é poderosa porque é uma abstração. Ela tira as coisas da realidade e as transforma em esferas perfeitas, cones, triângulos, quadrados e, em seguida, cria relações entre esses objetos. Não há dúvida de que essas relações podem nos ajudar a entender a realidade física, mas elas não são a realidade física. Elas são uma representação da realidade física. Então,

é meio incompreensível que a matemática, se inventada por nós, possa ser tão útil na descrição de tantos fenômenos naturais. Esta é a origem da questão: a matemática foi inventada ou foi descoberta? Foi uma criação das nossas mentes ou estava no universo esperando para ser descoberta por nós?

[MÚSICA TOCANDO]

