

Is Mathematics Really Perfect?

MARCELO GLEISER: Between 1910 and 1913 the British mathematicians and philosophers Bertrand Russell and Alfred North Whitehead were engaged in a very ambitious project. They wrote a three-volume book, *The Principia Mathematica*, in which they tried to build all of mathematics from ground up using pure logic. They wanted to show that mathematics is the purest and most perfect logical expression of thinking.

To do that, they started with a set of rules. And building from these rules, they wanted to explain all of mathematics. In order to do that, they used a highly symbolic language, a kind of alphabet of reason. To their surprise, in 1930, a 23-year-old Austrian mathematician named Kurt Godel demolished their dream of a mathematical perfection. Godel proved two theorems, now known as incompleteness theorems, that undermined the foundation of Russell and Whitehead's project.

Essentially, mathematics, or any formal system using number theory, is not self-contained as it necessarily includes a statement that is not provable and whose negation is also not provable. Also, Godel showed that the system's consistency itself cannot be proved using only the system's rules. The logical system, he concluded, is incomplete. In other words, the grand dream to build a self-contained, bottom-up construction of all of mathematics was shot down.

Godel switched symbols in *The Principia* for numbers, showing that the symbolic patterns could be represented as numerical patterns. Given that Russell and Whitehead's logical construction was self-referential, that is closed on itself, Godel showed that the whole project was logically similar to a known paradox known as the Liar's Paradox. This statement is false.

If you think a bit about this paradox, you get stuck in a loop. The statement can't be true because if it is, it is saying that it's false. But it can't be false either, since if it is, it's telling the truth. It takes a little while to get used to this. Godel showed that using the rules of *The Principia* he could write a formula that contradicted itself, something like, this formula is unprovable by the rules of *The Principia Mathematica*, a big hole in the logical project.

So Godel showed that mathematics carries in its very roots the seeds of its own limitations, something that goes right against the platonic dream of mathematical perfection where truth reigns supreme. You could, of course, supplement the logical rules of your system with new rules that would then make the original system logically self-contained. But then you would have a new, bigger system that would itself be incomplete, and it would need new rules to become complete. This can go on and on forever, like an onion that never ends, showing there is a hole in human logic stopping perfection from ever being attained.

[MUSIC PLAYING]

A Matemática é realmente perfeita?

MARCELO GLEISER: Entre 1910 e 1913 os filósofos e matemáticos britânicos Bertrand Russell e Alfred North Whitehead estavam envolvidos em um projeto muito ambicioso. Eles escreveram um livro em três volumes, o Principia Mathematica, no qual eles tentaram construir a matemática do zero usando lógica pura. Eles queriam mostrar que a matemática é a mais pura e perfeita expressão lógica do pensamento.

Para fazer isso, eles começaram com um conjunto de regras. E construindo a partir dessas regras, eles queriam explicar toda a matemática. Para fazer isso, eles usaram uma linguagem altamente simbólica, um tipo de alfabeto da razão. Para a surpresa deles, em 1930, um matemático austríaco de 23 anos chamado Kurt Godel destruiu o sonho deles de uma perfeição matemática. Godel provou dois teoremas, agora conhecidos como teoremas da incompletude, que abalaram o alicerce do projeto de Russell e Whitehead.

Essencialmente, a matemática ou qualquer sistema formal usando teoria numérica, não é autônomo e necessariamente inclui uma proposição que não é provável e cuja negação também não é provável. Além disso, Godel mostrou que a própria consistência do sistema não pode ser provada usando apenas as regras do sistema. O sistema lógico, concluiu ele, é incompleto. Em outras palavras, o grandioso sonho de realizar uma construção autônoma e ascendente de toda a matemática foi derrubado.

Godel trocou os símbolos do Principia por números, mostrando que os padrões simbólicos poderiam ser representados como padrões numéricos. Dado que a construção lógica de Russell e Whitehead era autorreferencial, que é fechada em si mesma, Godel mostrou que o projeto inteiro era logicamente semelhante a um famoso paradoxo conhecido como o Paradoxo do Mentiroso. "Essa declaração é falsa".

Se você pensar um pouco sobre esse paradoxo, você ficará preso em um ciclo. A declaração não pode ser verdadeira, porque se for, ela está dizendo que é falsa. Mas ela também não pode ser falsa, já que se for, ela está dizendo a verdade. Demora um pouco para se acostumar com isso. Godel mostrou que usando as regras do Principia ele poderia escrever uma fórmula que se contradizia, algo como essa fórmula seja improvável pelas regras do Principia Mathematica, um grande furo no projeto lógico.

Então Godel mostrou que a matemática carrega em suas próprias raízes as sementes de suas próprias limitações, algo que vai diretamente contra o sonho platônico de perfeição matemática onde a verdade reina soberana. Você poderia, claro, complementar as regras lógicas de seu sistema com novas regras que então fariam o sistema original logicamente autônomo. Mas então você teria um sistema novo e maior que seria incompleto e precisaria de novas regras para se tornar completo. Isso pode continuar para sempre, como uma cebola que nunca acaba, mostrando que há um furo na lógica humana impedindo a perfeição de ser obtida algum dia.

[MÚSICA TOCANDO]